# 非线性极大极小问题的混沌万有引力搜索算法求解 *

刘 勇[1,2], 马 良[1]
(1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

**摘 要**: 针对非线性极大极小问题目标函数不可微的特点,提出了一种混沌万有引力搜索算法的求解方法。该算法采用基于万有引力定律的优化机制引导群体进行全局探索,并基于混沌运动的随机性、遍历性和规律性特点,利用混沌优化对当前最优位置进行精细搜索,有效抑制算法早熟收敛现象,提高优化性能。数值实验结果表明,该算法具有计算精度高、数值稳定性好等特点。

**关键词**: 极大极小问题; 万有引力搜索算法; 混沌; 优化
**中图分类号**: TP301.6 **文献标志码**: A **文章编号**: 1001-3695(2012)01-0047-02
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2012.01.012

# Solving nonlinear minimax problems based on chaos gravitational search algorithm

LIU Yong[1,2], MA Liang[1]
(1. *School of Management*, *University of Shanghai for Science & Technology*, *Shanghai* 200093, *China*; 2. *Dept. of Fundamental Teaching*, *Yancheng Institute of Technology*, *Yancheng Jiangsu* 224051, *China*)

**Abstract**: Considering the character of the non-differentiation of objective function in nonlinear minimax problems, proposed achaos gravitational search algorithm. Used an optimization mechanism based on the law of gravitation to search the global optimal solution. Based on the randomicity, ergodicity and regularity properties of chaos, fine search was carried out by chaos optimization, which could avoid the premature convergence and improve the optimal performance. The simulation results show that the method has the advantages of high computing precision and good numerical stability.

**Key words**: minimax problems; gravitational search algorithm; chaos; optimization

## 0 引言

非线性极大极小问题是数学规划中一类典型的非光滑优化问题,要求在极大的条件下求目标函数的极小值。极大极小问题与曲线拟合、非线性方程组、非线性不等式组、多目标规划和对策论有紧密的联系,同时在工程设计、电子电路规划等方面有着广泛的应用[1,2]。因此,极大极小问题的研究有着重要的理论意义和实际价值。但由于目标函数不可微,给以梯度为基础的传统方法的求解带来了困难。近年来,智能优化算法的兴起为求解此类问题提供了新的思路。智能优化算法不要求目标函数连续可微,不需要梯度信息,使得算法具有较强的适应性。

基本万有引力搜索算法是一种基于万有引力定律寻优的新型智能算法,具有实现简单和通用性强等特点,在对标准测试函数进行优化时表现出良好的性能[3,4]。但与其他智能算法类似,万有引力搜索算法也存在局部优化能力差和早熟收敛等缺点,优化性能有待进一步提高。混沌是非线性系统中较为普遍的一种现象,混沌运动具有遍历性、随机性、规律性等特点,能不重复地、均匀地遍历整个搜索空间。这些特性使得混沌优化能有效避免陷入局部极值,同时实验表明其具有较好的优化潜力[5~7]。本文将混沌优化引入到万有引力搜索算法中,对当前最优位置利用混沌搜索进行优化,对可能陷入局部最优的个体位置进行扰动,改变其寻优轨迹,跳出局部极值,提高搜索的效率和质量。通过数值实验和与其他算法的比较,表明本文算法可行有效。

## 1 数学模型

考虑如下形式的极大极小问题:

$$\min \varphi(x) \tag{1}$$

其中:

$$\varphi(x) = \max\{f_i(x)\} \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{2}$$

上述模型中, $f_i(x)$ 为 $x \in R^n$ 的光滑实值函数;因目标函数 $\varphi(x)$ 在两个以上函数的交点处具有不连续的一阶导数,因此这类问题是一类不可微的非线性优化问题[8]。目前以梯度为基础的传统优化还不能有效求解此类问题。智能优化算法不要求目标函数连续可导,为求解此类问题提供了新的途径。为此,本文提出了一种基于混沌万有引力搜索算法的求解方法。

## 2 混沌万有引力搜索算法

基本万有引力搜索算法是由 Rashedi 等人首先提出的,是一种基于万有引力定律进行寻优的智能优化方法。算法将优化问题的解视为一组在空间运行的物体,物体之间通过万有引力作用相互吸引,物体运动遵循动力学规律,万有引力的作用使得物体朝着质量最大的物体移动,而质量最大的物体占据最优位置,从而可求出优化问题的最优解。算法通过个体间的万有引力相互作用实现优化信息的共享,引导群体向最优解区域

**收稿日期**: 2011-06-16; **修回日期**: 2011-07-25 **基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(70871081);上海市重点学科建设项目(S30504)
**作者简介**: 刘勇(1982-),男,江苏淮安人,博士研究生,主要研究方向为智能优化、系统工程等(liuyong.seu@163.com);马良(1964-),男,上海人,教授,博导,主要研究方向为智能优化、系统工程等.

搜索。实验表明算法具有较强的全局探索能力,但局部搜索能力较弱,易陷入局部极值,寻优能力可进一步改善。

基于混沌运动在一定范围内能按其自身的规律不重复地遍历所有状态的特点,利用混沌优化进行局部搜索可改善优化性能。先将优化变量映射到混沌状态中,再把混沌运动的遍历范围逆映射到优化变量的搜索区间,利用混沌变量进行优化搜索。具体方法如下:假设 $L_{\text{best}}$ 表示当前最优位置,Up 表示上限,Low 表示下限,先将 $L_{\text{best}}$ 映射到[0,1]区间,即令 $t=\frac{(L_{\text{best}}-\text{Low})}{(\text{Up}-\text{Low})}$,利用 Logistic 映射 $t'=\mu t(1-t)$ 产生混沌变量 $t'$,再逆映射到搜索区间,即 $L_{\text{best}}'=\text{Low}+t'(\text{Up}-\text{Low})$。其中控制参数 $\mu=4$,系统完全处于混沌状态,有利于跳出局部最优。重复上述步骤一定次数,直到函数值不再改进。

综上所述,本文算法的主要步骤如下:

a)初始化。考虑由 $N$ 个物体组成的系统,每个物体定义在 $D$ 维搜索空间中,物体的位置代表优化问题的解。第 $i$ 个物体的位置定义如下:

$$X_i=(x_i^1,\cdots,x_i^d,\cdots,x_i^D)\quad i=1,2,\cdots,N \tag{3}$$

其中:$x_i^d$ 表示第 $i$ 个物体在第 $d$ 维空间的位置。

b)计算物体的质量。在时刻 $t$ 时物体的质量定义如下:

$$q_i(t)=\frac{\text{fit}_i(t)-\text{worst}(t)}{\text{best}(t)-\text{worst}(t)} \tag{4}$$

$$M_i(t)=\frac{q_i(t)}{\sum_{j=1}^{N}q_j(t)} \tag{5}$$

其中:$M_i(t)$ 和 $\text{fit}_i(t)$ 分别表示在时刻 $t$ 时第 $i$ 个物体的质量和函数值;$\text{best}(t)$ 和 $\text{worst}(t)$ 表示在时刻 $t$ 时所有物体中最优函数值和最差函数值。对最小化问题其定义如下:

$$\text{best}(t)=\min_{j\in\{1,2,\cdots,N\}}\text{fit}_j(t) \tag{6}$$

$$\text{worst}(t)=\max_{j\in\{1,2,\cdots,N\}}\text{fit}_j(t) \tag{7}$$

c)计算万有引力。物体 $i$ 与 $j$ 之间的万有引力定义如下:

$$F_{ij}^d(t)=G(t)\frac{M_j(t)M_i(t)}{R_{ij}(t)+\varepsilon}(x_j^d(t)-x_i^d(t))\quad d=1,2,\cdots,D \tag{8}$$

其中:$G(t)$ 表示在时刻 $t$ 时万有引力常数,$G(t)=G_0\mathrm{e}^{-\alpha\frac{t}{T}}$,$t$ 表示当前迭代次数,$T$ 表示最大迭代次数,本文 $G_0=100$,$\alpha=10$;$R_{ij}(t)$ 表示物体 $i$ 与 $j$ 间欧式距离;$\varepsilon$ 是一常数,防止分母为 0。

d)计算合力。物体 $i$ 所受的合力为

$$F_i^d(t)=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\text{rand}_jF_{ij}^d(t) \tag{9}$$

其中:$\text{rand}_j$ 表示在[0,1]之间的一个随机数。

e)更新加速度、速度和位置。在时刻 $t$ 物体 $i$ 在第 $d$ 维的加速度、速度和位置的更新方程为

$$a_i^d(t)=\frac{F_i^d(t)}{M_i(t)} \tag{10}$$

$$v_i^d(t+1)=\text{rand}_i\times v_i^d(t)+a_i^d(t) \tag{11}$$

$$x_i^d(t+1)=x_i^d(t)+v_i^d(t+1) \tag{12}$$

其中:$\text{rand}_i$ 表示在[0,1]之间的一个随机数。

f)对当前最优位置 $L_{\text{best}}$ 进行混沌优化搜索。

g)如果没有达到最大迭代次数且无退化行为(即找到的都是相同的解),转 b);否则,停止计算,输出当前的最优解。

## 3　数值实验

为验证算法的性能,采用文献[8~10]中的几个典型算例进行测试,并与文献中的极大熵方法(又称凝聚函数法)和蚁群优化算法[11]的求解结果进行比较。实验硬件环境为 Intel CPU P81002.4 GHz,1GB RAM;软件环境为 Windows 7 和 MATLAB R2011。

算例 1　$\min\varphi(x)=\min\max\{f_i(x)\}(i=1,2,3)$。其中:

$$\begin{cases}f_1(x)=x_1^4+x_2^2\\f_2(x)=(2-x_1)^2+(2-x_2)^2\\f_3(x)=2\exp(-x_1+x_2)\end{cases}$$

已知问题的最优值为 $\varphi^*=\max\{f_1^*,f_2^*,f_3^*\}=2$,其中 $f_1^*=f_2^*=f_3^*=2$。文献[8]中的凝聚函数法的最优结果为 $\varphi=\max\{f_1,f_2,f_3\}=2.0000004$,其中 $f_1=1.9999998$,$f_2=2.0000004$,$f_3=1.9999993$;运行蚁群优化算法可得到最优解 $\varphi=\max\{f_1,f_2,f_3\}=2$,其中 $f_1=f_2=f_3=2$;运行混沌万有引力搜索算法每次也可获得最优值 $\varphi=\max\{f_1,f_2,f_3\}=2.0000$,其中 $f_1=f_2=f_3=2.0000$。

算例 2　$\min\varphi(x)=\min\max\{f_i(x)\}(i=1,2,3)$。其中:

$$\begin{cases}f_1(x)=10+2x_1+2x_2-x_1^2+x_2^2-x_1x_2\\f_2(x)=2+x_1-x_2+2x_1^2-x_2^2+3x_1x_2\\f_3(x)=x_1^2+x_2^2\end{cases}$$

已知问题的最优解为 $\varphi^*=\max\{f_1^*,f_2^*,f_3^*\}=4.25$,其中 $f_1^*=f_2^*=f_3^*=4.25$。文献[8]中的凝聚函数法获得的最优值为 $\varphi=\max\{f_1,f_2,f_3\}=4.2500003$,其中 $f_1=4.2500000$,$f_2=4.2500003$,$f_3=4.2499996$;反复运行蚁群优化算法都未能达到最优解,其最好结果为 $\varphi=\max\{f_1,f_2,f_3\}=4.4901$,其中 $f_1=4.4901$,$f_2=3.9398$,$f_3=4.1870$;运行混沌万有引力搜索算法均可得最优解 $\varphi=\max\{f_1,f_2,f_3\}=4.2500$,其中 $f_1=f_2=f_3=4.2500$。

算例 3　$\min\varphi(x)=\min\max\{f_i(x)\}(i=1,2)$。其中:

$$\begin{cases}f_1(x)=|x_1+2x_2-7|\\f_2(x)=|2x_1+x_2-5|\end{cases}$$

已知问题的最优解为 $\varphi^*=\max\{f_1^*,f_2^*\}=0$,其中 $f_1^*=f_2^*=0$。多次运行蚁群优化算法均未能得到最优解,最好结果为 $\varphi=\max\{f_1,f_2\}=0.0336$,其中 $f_1=0.0159$,$f_2=0.0336$;运行混沌万有引力搜索算法每次都能得到最优解 $\varphi=\max\{f_1,f_2\}=0$,其中 $f_1=f_2=0$。

算例 4　$\min\varphi(x)=\min\max\{f_i(x)\}(i=1,2)$。其中:

$$\begin{cases}f_1(x)=-x_1-x_2\\f_2(x)=-x_1-x_2+x_1^2+x_2^2-1\end{cases}$$

已知问题的最优解为 $\varphi^*=\max\{f_1^*,f_2^*\}=-1.4142$,其中 $f_1^*=f_2^*=-1.4142$。多次运行蚁群优化算法均未能搜索到最优解,其最好结果为 $\varphi=\max\{f_1,f_2\}=-1.3981$,其中 $f_1=-1.4066$,$f_2=-1.3981$;运行混沌万有引力搜索算法每次都能得到最优解 $\varphi=\max\{f_1,f_2\}=-1.4142$,其中 $f_1=f_2=-1.4142$。

从以上典型算例的计算结果可以看出,混沌万有引力搜索算法比其他算法具有更强的获取全局最优解的能力。该算法利用基于万有引力定律的寻优机制进行全局搜索,同时利用混沌优化对当前最优解区域进行集中探索,保证算法全局搜索和局部开发能力的平衡,避免算法陷入局部极值,具有较强的优化性能。

## 4　结束语

为求解非线性极小极大问题,本文提出了 (下转第 56 页)

通过增加松施度参数,被选取作为估算坐标的地标会增加,这些地标会进入一个集合中,用于估算目标标签的位置,但会减少估算的精确度。

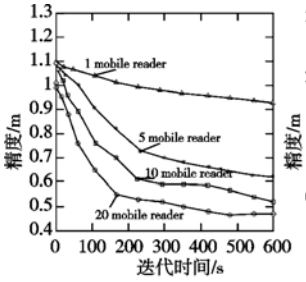


图8　读写器间距离为6 m，使用移动读写器，没有使用松驰度参数，$\sigma$=1时的三维定位精度

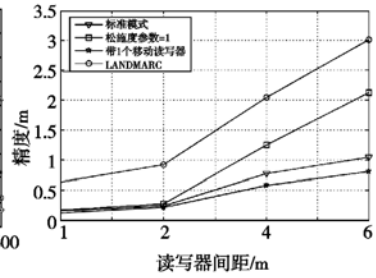


图9　与LANDMARC算法对比实验结果

## 3　结束语

本文提出了一种拓扑约束的 RFID 三维定位算法,使用虚拟地标与拓扑约束相结合对标签进行定位。算法具备以下优点:a)定位的速度比较快,因为每个读写器只需要读写一个标签就可以了;b)可以选用较为简单的读写器对系统的整体成本加以控制。不需要基于参考标签的测量方法必须在球形的读写范围内利用读写器与标签的距离把信号的强度发成若干个等级才能实现定位。除此之外,增加移动式读写器,可以不考虑系统复杂程度和时间的情况下,简单而快速地提高定位精度。本算法是一种三维的 RFID 定位算法,可以很容易地集成到现有的 RFID 系统中去。

仿真结果表明算法在不增加移动读写器时,定位精度为间隔的 20% 左右;在增加移动式读写器情况下,静态读写器间隔 6 m 时,其瞬时定位精度为读写器间隔的 12%,如果读写器数量较大时,600 s 迭代运算收敛后可获得 0.4 m 内的定位精度,为读写器间隔的 6%;与传统 LANDMARC 系统定位精度为读写器间隔的 50% 左右相比,定位精度可以提高 6 倍以上。

**参考文献:**

[1] NI L M, LIU Yun-hao, LAU Y C, *et al*. LANDMARC: indoor location sensing using active RFID[J]. Wireless Networks, 2004, 10(6): 701-710.

[2] WANG Chong, WU Hong-yi, TZENG N F. RFID-based 3-D positioning schemes[C]//Proc of the 26th IEEE International Conference on Computer Communications. Washington DC: IEEE Computer Society, 2007: 1235-1243.

[3] BEKKALI A, SANSON H, MATSUMOTO M. RFID indoor positioning based on probabilistic RFID map and Kalman filtering[C]//Proc of the 3rd IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications. New York: IEEE Press, 2007: 21-23.

[4] BECHTELER T F, YENIGUN H. 2-D localization and identification based on SAW ID-tags at 2.5 GHz[J]. IEEE Trans on Microwave Theory and Techniques, 2003, 51(5): 1584-1590.

[5] HIGHTOWER J, WANT R, BORRIELLO G. SpotON: an indoor 3D location sensing technology based on RF signal strength[R]. Seattle: University of Washington, 2000.

[6] LIU Hong-tao, CHENG Liang-lun, LI Da-peng. Design of smart nodes for RFID wireless sensor networks[C]//Proc of the 1st International Workshop on Education Technology and Computer Science. Washington DC: IEEE Computer Society, 2009: 132-136.

[7] 陈聪传. 基于 RFID 的战时医院人员与重要设备物资定位管理系统研究与实现[D]. 广州:广东工业大学,2010.

[8] 黎大鹏. 基于锚节点动态调整的传感器网络移动节点定位系统的研究[D]. 广州:广东工业大学,2009.

[9] GUSTAFSSON F, GUNNARSSON F. Mobile positioning using wireless networks: possibilities and fundamental limitations based on available wireless network measurements[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2005, 22(4): 41-53.

[10] RAPPAPORT T. Wireless communications: principles and practice[M]. 2nd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall PTR, 2001.

[11] MYUNG J, LEE W, SRIVASTAVA J, *et al*. Tag-splitting: adaptive collision arbitration protocols for RFID tag identification[J]. IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems, 2007, 18(6): 763-775.

(上接第 48 页)一种混沌万有引力搜索算法。通过数值实验和与凝聚函数法、蚁群优化算法的比较表明,本文算法具有较强的优化性能,为求解此类问题提供了一个新的有效的方法。万有引力搜索算法是一种新型的优化算法,目前对它的相关研究还很少,将其进行改进以应用到更多的优化问题中是后续的研究工作。

**参考文献:**

[1] 黄震宇,沈祖和. 解一类非线性极大极小问题的熵函数方法[J]. 科学通报,1999,41(17):1550-1554.

[2] 李坤杰,陶跃钢,刘国平. 非线性极大极小系统全局优化算法的分析[J]. 数学的实践与认识,2008,38(20):127-133.

[3] RASHEDI E, NEZAMABADI-POUR H, SARYAZDI S. GSA: a gravitational search algorithm[J]. Information Sciences, 2009, 179(13): 2232-2248.

[4] RASHEDI E, NEZAMABADI-POUR H, SARYAZDI S. Filter modeling using gravitational search algorithm[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2011, 24(1): 117-122.

[5] 李兵,蒋慰. 混沌优化方法及其应用[J]. 控制理论与应用,1997,14(4):613-615.

[6] RICCARDO C, LUIGI F, STEFANO F, *et al*. Chaotic sequences to improve the performance of evolutionary algorithms[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2003, 7(3): 289-304.

[7] ALATAS B, AKIN E, OZER A B. Chaos embedded particle swarm optimization algorithm[J]. Chaos, Solutions and Fractals, 2009, 40(4): 1715-1734.

[8] 李兴斯. 解非线性极大极小问题的凝聚函数法[J]. 计算结构力学及其应用,1991,8(1):85-92.

[9] 纪震,廖惠连,吴青华. 粒子群算法及应用[M]. 北京:科学出版社,2009.

[10] 文新辉,陈开周. 解无约束极大极小问题的非对称神经网络算法[J]. 电子学报,1995,23(12):111-114.

[11] 马良,朱刚,宁爱兵. 蚁群优化算法[M]. 北京:科学出版社,2008.